求表捷術

外切密率卷之四

割綫求本弧

術曰先求各率分子為遞次乘法　置單一兩次一乘得一為數根復置單一三四遞乘之折半又一除一乘得六為初減數數根減初減得五為第一乘法　置前數根兩次二乘得四為數根復置前數根五六遞乘之折半又一除二乘得三十為初減數置前初減五六遞乘之折半又二除二乘得九十為次減數數根減初減得二十六再減次減得六十四為第二乘法　置前數根兩次三乘得三十六為數根復置前數根七八遞乘之折半又一除三乘得三百三

六爲初減數置前初減七八遞乘之折半又二除三乘得一千二百六十爲次減數置前次減七八遞乘之折半又三除三乘得二千五百二十爲三減數數根減初減得三百再減次減得九百六十再減三減得一千五百六十爲第三乘法　置前數根兩次四乘得五百七十六爲數根復置前數根九十遞乘之折半又一除四乘得六千四百八十爲初減數置前初減九十遞乘之折半又二除四乘得三萬〇二百四十爲次減數置前次減九十遞乘之折半又三除四乘得七萬五千六百爲三減數置前三減九十遞乘之折半又四除四乘得十一萬三千四百爲四減

數數根減初減得五千九百〇四再減次減得二萬四千三百三十六再減三減得五萬一千二百六十四再減四減得六萬二千一百三十六爲第四乘法凡求數根以一二三等數兩次乘之其求各減數先用奇耦二數乘之而折半（如第一乘法三四乘之折半第二乘去五六乘之折半）再用一二三等數挨減數遞加除之（如第四乘法初減又一除次減又二除三減又三除）又一二三等數挨乘法遞加乘之（如第三乘法通三乘第四乘法通四乘）其各減則生于前各減而降一等（如第二乘法初減生于前數根次減生于前初減）乘法降一位則多一減如是遞求得各率分子即爲遞次乘法（術中乘除多有可省筭者以明遞求之例故不省）

乃以割線內減半徑爲割線半徑差倍之爲倍差爲第一數正　次以半徑爲連比例一率倍差爲三率置第一數以三率乘之一率除之得五率三四遞除之爲七率用數第一乘法乘之爲第二數負　置七率用數以三率乘之一率除之得七率五六遞除之爲九率用數第二乘法乘之爲第三數正　置九率用數以三率乘之一率除之得九率七八遞除之爲十一率用數第三乘法乘之爲第四數負　置十一率用數以三率乘之一率除之得十一率九十遞除之爲十三率用數第四乘法乘之爲第五數正　凡奇數爲正耦數爲負如是遞求至單位下乃併諸正

數以併諸負數減之所得爲以半徑爲一率本弧爲二率之三率與半徑相乘平方開之得本弧

解曰割線求本弧依還原之法當取本弧求割線半徑差率分倍之命爲連比例三率以半徑爲一率依法求得五七九等率復取本弧求割線半徑差率分加減之卽可得割線半徑差求本弧率分惟分子之所由來究不可見是以取割線半徑差倍之爲倍差命爲三率半徑爲一率先求倍矢然後置倍差求倍矢率分命爲三率半徑爲一率依法遞求五七九各率再取倍矢求弧背各率分數以倍差求倍矢率分變易之卽得倍差求本弧各

率分數而分子之所由來乃顯然而可見矣

如圖乙丙為本弧甲丁為本弧割線乙丁為割線半徑差庚丁為倍差戊丙為本弧正矢辛丙為倍矢庚壬同甲丙為半徑法以甲丁割綫大弦比甲丙半徑大股若庚丁倍差小弦與辛丙即庚壬倍矢小股

一率　大弦　　割線一率一又三率二分之一

二率　大股　　一率半徑

三率　小弦　　三率倍差

四率　小股　　倍差求倍矢率分

	一乘三	一乘五	一乘七	一乘九	一乘十一
初商實					
次商實					
三商實					
四商實					
五商實					

如圖先以倍差三率乘半徑一率得第一層一率乘三率一爲初商實其割線命爲一率一又三率二分之一爲除法以其首位約初商實得三率一即爲初商以乘除法得二層一率乘三率一又一率乘五率二分之一以減原實得三層少一率乘五率二分之一爲次商實以除法首

位約之得少五率二分之一卽爲次商以乘除法得四層少一率乘五率二分之一少一率乘七率兩次二分卽二分又二分之一以減原實得五層一率乘七率兩次二分之一爲三商實以除法首位約之得七率兩次二分之一卽爲三商以乘除法得六層一率乘七率兩次二分之一又一率乘九率三次二分之一以減原實得七層少一率乘九率三次二分之一爲四商實以除法首位約之得少九率三次二分之一卽爲四商以乘除法得八層少一率乘九率三次二分之一少一率乘十一率四次二分之一以減原實得九層一率乘十一率四

次二分之一以爲五商實以除法首位約之得十一率四次二分之一卽爲五商以乘除法得十層一率乘十一率四次二分之一以減原實適盡通計得倍差求倍矢率分三率一少五率二分之一多七率兩次二分之一少九率三次二分之一多

倍差十一率二二二二丨	倍差九率二二二二卜	倍差七率二二二丨	倍差五率二二卜	倍差三率○丨

十一率四次二分之一也

于是取倍差求倍矢率分卽命爲倍矢三率自乘半徑一率除之得倍差五率一少倍差七率二分之二多倍差九率兩次二分之三少倍差十一率三次二分之四爲倍矢五率以乘倍矢三率半徑一率除之得倍差七率

倍矢三率〇丨

倍差十一率　倍差九率　倍差七率　倍差五率　倍矢五率　倍差十三率　倍差九率　倍差七率　倍矢七率

一少倍差九率二分之三多倍差十一率兩次二分之六爲倍矢七率又以倍矢三率乘之一率除之得倍差九率一少倍差十一率二分之四爲倍矢九率又以倍矢三率乘之一率除之得倍差十一率一爲倍矢十一率也

細審倍差求倍矢各率其分母皆遞加二分其分子適合乎遞加數三率分子均爲一爲遞加數根五率分子爲一二三四等數即遞加數七率分子爲一二三六等數即二次遞加數九率分子爲一

率 二卅卜倍差十二卅

率 倍差九〇一

率 倍矢九〇一

率 倍差十一〇一

率 倍矢十一〇一

四等數爲三次遞加數則十一率之一亦必爲四次遞加數之第一數凡第四次遞加數之遞求各數係用中間三數之兩數一除一乘加取第一數之一以一除五乘得第二數之五再加二除六乘得第三數之十五圖止十一率故遞加之率未顯其三次遞加數之遞求各數則用中間二數之兩數一除一乘中間二數加一與四二與五其二次遞加數之遞求各數則用中間一數之兩數一除一乘其遞加數則用相連兩數一除一乘其遞加數根則就一數一除一乘雖一數乘除本可省筭而其理則然也

如圖取倍差求倍矢三率各分子斜列之爲第一列其三率分子起單一以一除一乘仍得一爲五

第五列　第四列　第三列　第二列　第一列

率分子二除二乘仍得一爲七率分子三除三乘仍得一爲九率分子四除四乘仍得一爲十一率分子（此所謂就一數一除一乘）復取倍矢五率斜列之爲第二列其五率起單一一除二乘得二爲七率分子二除三乘得三爲九率分子三除四乘得四爲十一率分子（此所謂相連兩數一除一乘）又取倍矢七率斜列之爲第三列

其七率分子起單一一除三乘得

三爲九率分子二除四乘得六爲十一率分子（此所謂中間一數之兩數一除一乘）又取倍矢九率斜列之爲第四列

其九率分子起單一一除四乘得四爲十一率分子（此所謂中間二數之兩數一除一乘）又取倍矢十一率補列之爲

第五列其十一率亦起單一其全圖逐率乘除之

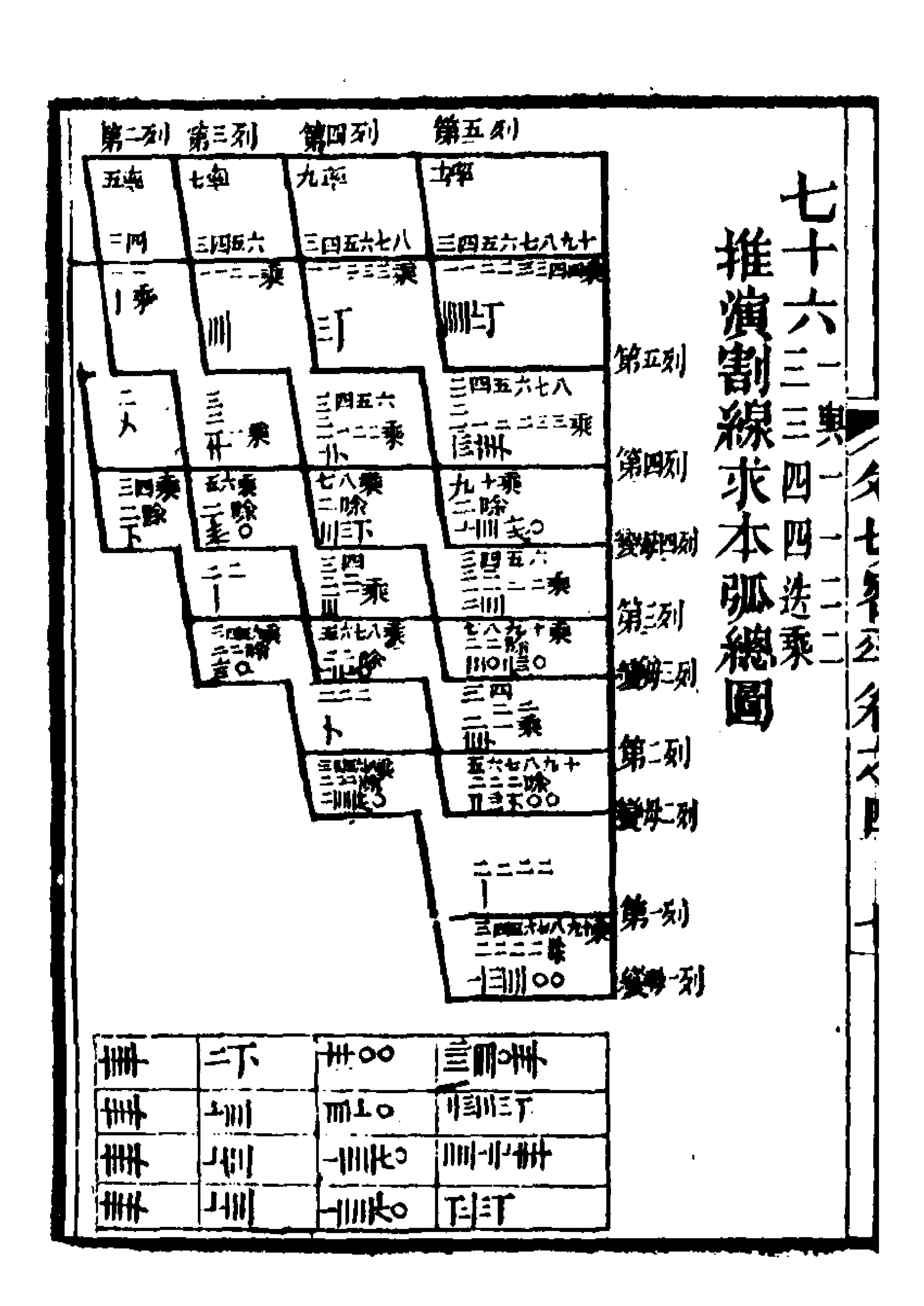
例均秩然而不紊然後取倍矢求弧背率分變易

之茲依泰西杜氏演得倍矢求弧背各率分數爲

三率一又五率三四分之一（一自乘乘單一）又七率三四

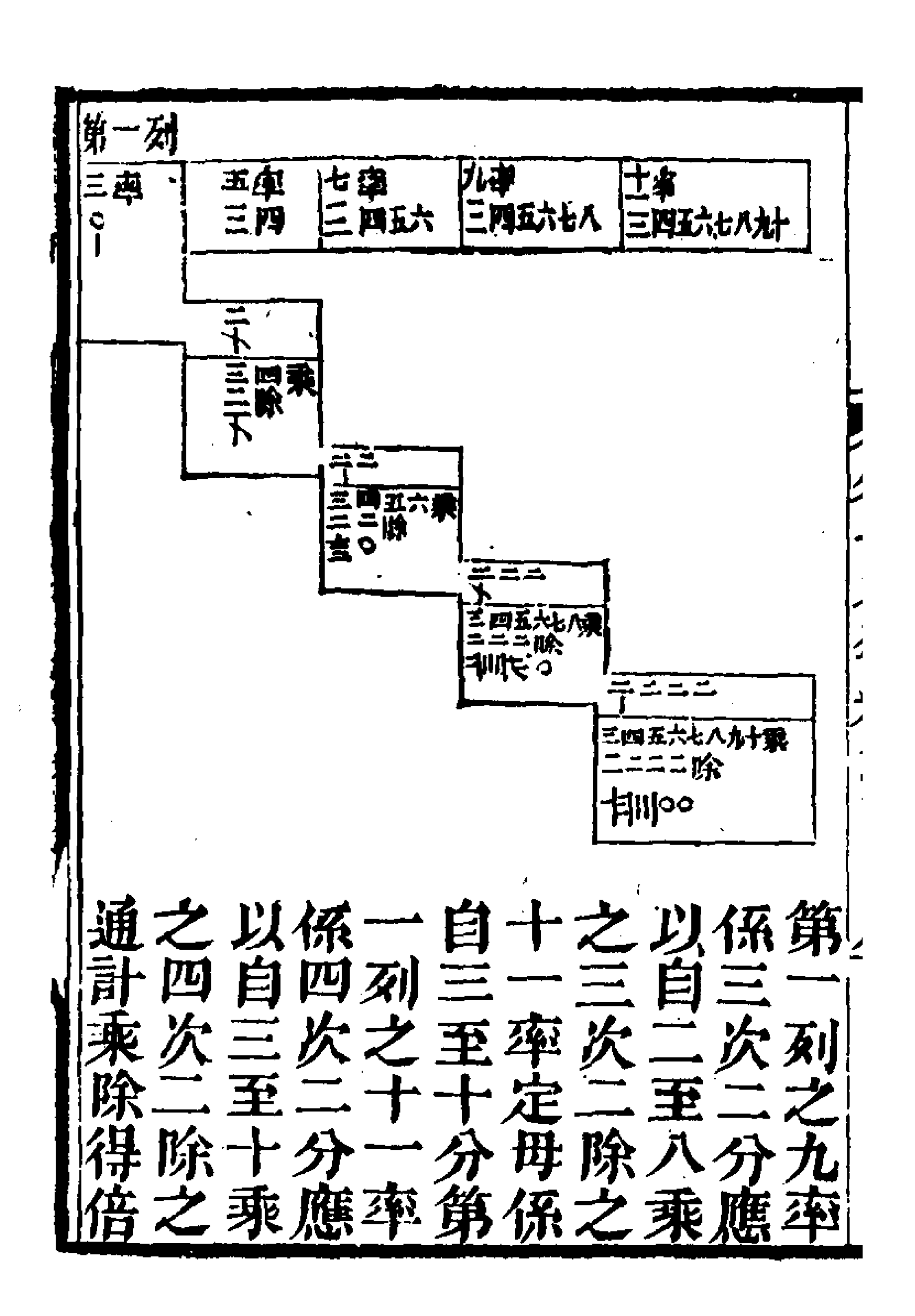
五六分之四（一與一一二二迭乘）又九率自三至八分之三

十六（一與一一二二三三迭乘）又十一率自三至十分之五百


七十六
推演割線求本弧總圖
第二列
第三列
第四列
第五列

第一列
三率

如圖先以倍矢求弧背分母列于上為定母次視
倍矢求弧背率分之三率為單一乃取倍着求倍
矢三率率分為三率一少五率二分之一多七率
兩次二分之一少九率三次二分之一多十一率
四次二分之一即命為倍矢求弧背之三率斜列
之為第一列次視其各率分母使從定母五率之
定母係三四分而第一列之五率分母係二分應
以三四乘之二除之使從定母七率定母係三四
五六分而第一列之七率係兩次二分應以三四
五六乘之兩次二除之九率定毋係自三至八分



第一列之九率係三次二分應以自二至八乘之三次二除之十一率定母係自三至十分第一列之十一率係四次二分應以自三至十乘之四次二除之通計乘除得倍

差三率一少五率三四分之六多七率三四五六分之九十少九率自二至八分之二千五百二十多十一率自三至十分之十一萬三千四百爲變母一列

次視倍矢求弧背之五率其分母爲三四其分子爲一自乘乘單一乃取倍差求倍矢五率率分五率一少七率二分之二多九率兩次二分之三少十一率三次二分之四以倍矢求弧背五率三四分之一乘之得倍差五率三四分之一少七率三四分又二分之二多九率三四分又兩次二分之三少十一率三四分又三次二分之四卽命爲倍

第二列

十一率 三四五六七八九十	九率 三四五六七八	七率 三四五六	五率 三四 二一乘
三四 二二一乘 五六七八九十乘 二二二除	三四 二二一乘 五六七八乘 二二除	三四 二一乘 五六乘 二除	

矢求弧背五率斜列之為第二列應使從定毋其五列之分母與定毋同其七率定母係三四五六分第二列之七率分母係三四分又二分應以五六乘之二除之其九率定母係自三至八分第二列之九率分母係三四分又兩次二分應以五六七八乘之又兩次二除之其十一率定母係自三至

十分第二列之十一率分母係三四分又三次二分應以自五至十乘之又三次二除之通計乘除得倍差五率三四分之四少七率三四五六分之三十多九率自三至八分之一千二百六十少十一率自三至十分之七萬五千六百爲變母二列次視倍矢求弧背之七率其分母爲三四五六分其分子爲一與一二二迭乘乃取倍差求倍矢七率率分七率一少九率二分之三多十一率兩次二分之六以倍矢求弧背之七率三四五六分之四乘之得倍差七率三四五六分之四少九率三四五六分又二分之十二多十一率三四五六

分又兩次二分之二十四命爲倍矢求弧背七率斜列之爲第三列應使從定母其七率之分母與定母同其九率定母係自三至八分第三列之九率分母係三四五六分又二分應以七八乘之二除之其十一率定母係自三至十分第三列之十一率分母係三四五六分又兩次二分應以七八九十乘之又兩次二除之通計乘除得倍差七率三四五六分之四少九率自三

第三列

七率
三四五六
一一二二乘
川

九率
三四五六七八

三四五六
二
一一二二乘
一卌
七八乘
二除
卌下

十一率
三四五六七八九十

三四五六
一一二二乘
二川
七八九十乘
二二除
川〇川三〇

至八分之三百三十六多十一率自三至十分之三萬〇二百四十爲變母三列

次視倍矢求弧背之九率其分母爲自三至八分其分子爲一與一一二二三三迭乘乃取倍差求倍矢九率率分九率一少十一率二分之四以倍矢求弧背之九率自三至八分之三十六乘之得倍差九率自三至八分之三十六少十一率自三至八分又二分之一百四十四命爲倍矢求弧背九率斜列之爲第四列應使從定母其九率之分母與定母同其十一

第四列

十率	九率
三四五六七八九十	三四五六七八
	二一二二三三乘
	三丅
三四五六七八	
二一二二三三乘	
三卌	
九十乘 二除 卌定〇	

率定母係自三至十分其第四列之十一率分母係自三至八分又二分應以九十乘之二除之通計乘除得倍差九率自三至八分之三十六少十一率自三至八分之六千四百八十爲變母四列次視倍矢求弧背之十一率其分母爲自三至十分其分子爲一與一一二二三三四四迭乘乃取

第五列								
十一率								
三	四	五	六	七	八	九	十	
一	一	二	二	三	三	四	四	乘
卌卄丅								

倍差求倍矢十一率率分十一率一以倍矢求弧背十一率自三至十分之五百七十六乘之得倍差十一率自三至十分之五百七十六命爲倍矢求弧背十一率其分母與定母同無須變母

	三率	五率	七率	九率	十一率
第一層分子	1	1	4	36	576
第二層分子		6	30	336	6480
第一并數	1	5	26	300	5904
第三層分子			90	1260	30240
第二并數	1	5	64	960	24336
第四層分子				2520	75600
第三并數	1	5	64	1560	51264
第五層分子					113400
第四并數	1	5	64	1560	62136
	〇	三四	三四五六	三四五六七八	三四五六七八九十
	1	5	64	1560	62136

于是各率分子相併其第一層分子三率一又五率一又七率四又九率三十六又十一率五百七十六均為正數其第二層分子五率六七率三十九率三百三十六十一率六千四百八十均為負數正負異名應以減為并計減得分子三率一少五率五少七率二十六少九率三百少十一率五千九百〇四為第一并數其自五率以下均屬負數其第三層七率九十九率一千二百六十十一率三

萬〇二百四十均爲正數仍當以減爲并計減得分子三率一少五率五多七率六十四多九率九百六十多十一率二萬四千三百三十六爲第二并數其自七率以下均爲正數其第四層分子九率二千五百二十十一率七萬五千六百均爲負數仍當用減計減得分子三率一少五率四多七率六十四少九率一千五百六十少十一率五萬一千二百六十四爲第三并數其自九率以下均爲負數其第五層十一率分子十一萬三千五百爲正數仍當用減計減得三率一少五率五多七率六十四少九率一千五百六十多十一率六萬

二千一百三十六爲第四并數通計求得倍差求本弧各率分數爲三率一少五率三四分之五多七率三四五六分之六十四少九率自三至八分之一千五百六十少十一率自三至十分之六萬二千一百三十六也

細審倍差求本弧率分其分母與倍矢求弧背同是其逐率除法自三四而五六亦與倍矢求弧背同于是審其分子之由來由前圖變爲又圖其逐率首層爲數根而三率分子單一爲諸數之所起其第一數根爲一與一一乘第二數根爲一一二迭乘是取第一數以二三乘之卽第二數根也

數根	|	一一乘 |	一一二二乘 |||	一一二二三三乘 三丁	一一二二三三四四乘 川亠丁
初減數		三四乘 二除 丁	一一乘 五六乘 二除 三〇	一一二二乘 七八乘 二除 川三丁	一一二二三三乘 九十乘 二除 ⊥川三〇
初減數			三四五六乘 二二除 亖〇	一一乘 五六七八乘 二二除 一||⊥〇	一一二二乘 七八九十乘 二二除 |||〇||三〇
三減數				三四五六七八乘 二二二除 一|||||二〇	一一乘 五六七八九十乘 二二二除 川三丁〇〇
四減數					三四五六七八九十乘 二二二二除 一三|||〇〇

第三數根爲一與一一二二三三迭乘是以第二數根三三乘之卽第三數根也第四數根爲一與一一二二三三四四迭乘是以第三數根四四乘之卽第四數根也復斜䙡其第一各減數爲遞加數之根而首位卽三率分子之一第一初減爲遞加數根之第二位其乘爲三四乘除爲二除是取三率分子之單一

即遞加數根首位 用遞加數根第一數求第二數之法一

除一乘然後三四乘之二除之卽第一初減也第

第一次減爲遞加數根之第三位爲三四五六乘

又兩次二除以較第一初減多五六乘及二除是

取第一初減用遞加數根第二數求第三數之法

二除二乘然後五六乘之二除之卽第一次減也

第一三減爲遞加數根之第四位爲自三至八乘

又三次二除以較第一次減多七八乘及二除是

取第一次減用遞加數根第三數求第四數之法

三除三乘然後七八乘之二除之卽第一三減也

其第一四減爲遞加數根之第五位爲自三至十

乘又四次二除以較第一三減多九十乘又二除是取第一三減先用遞加數根第四數求第五數之法五除五乘然後九十乘之二除之卽第一四減也復斜視其第二各減數爲遞加數而首位卽第一數根第二初減爲遞加數之第二位其乘爲一一乘又五六乘其除爲二除以較第一數根其一一乘同惟多五六乘及二除是取第一數根用遞加數第一數求第二數之法一除二乘又五六乘之二除之卽第二初減也其第二次減爲遞加數第三位用一一乘又五六七八乘又兩次二除以較第二初減多七八乘又二除是第二初減用

遞加數求第三數之法二除三乘然後七八乘之二除之卽第二次減也其第二三減爲遞加數第四位用一一乘又自五至十乘又三次二除以較第二次減多九十乘及二除是取第二次減用遞加求第四數之法三除四乘然後九十乘之又二除之卽第二三減也復斜視其第三各減數爲二次遞加數而首位卽第二數根第三初減爲二次遞加數之第二位用一一二二迭乘又七八乘又二除較第二數根其迭乘數同惟多七八乘又二除是以第二數根用二次遞加數求第二數之法一除三乘然後七八乘之又二除之卽第三初減

也其第三次減爲二次遞加數之第三位亦一一二二迭乘又七八九九十乘又兩次二除以較第三初減多九十乘又二除是以第三初減用二次遞加數求第三數之法二除四乘然後九十乘之又二除之卽第三次減也其第四初減爲三次遞加數之第二位而首位卽第三數根第四初減用一一二二三三迭乘又九十乘二除以較第三數根其迭乘數亦同惟多九十乘及二除是取第三數根用三次遞加數求第二數之法一除四乘然後九十乘之又二除之卽第四初減也

復由諸圖變爲後圖第一層數根起單一爲三率

四四乘	三三乘	二二乘	一一乘

分子加一一乘爲第一數根再加二二乘爲第二數根再加三三乘爲第三數根再加四四乘爲第四數根通計皆用一二三四等數自乘

爲乘法第二層初減數復置單一以一除一乘又三四乘二除爲第一初減置第一數根一除二乘又五六乘二除爲第二初減置第二數根一除三乘又七八乘二除爲第三初減置第三數根一除四乘又九十乘二除爲第四初減通計其乘除則

先用一除而乘亦自一而遞加次用三四乘而遞加又通加二除第三層減餘首位五爲五率分子卽第一乘法第四層次減數置第一初減二除二乘又五六乘二除爲第一次減置第二初減二除三乘又七八乘二除爲第二次減置第三初減二除四乘又九十乘二除爲第三次減通計其乘除則先用二除而乘亦起二而遞加次用五六乘而遞加而亦通加二除第五層減餘首位六十四爲七率分子卽第二乘法第六層二減數置第一次減三除三乘又七八乘二除爲第一三減置第二次減三除四乘又九十乘二除爲第二三減通計

其乘除則用三除而乘亦起三而遞加次用七八乘而遞加而通加二除第七層減餘首位一千五百六十爲九率分子卽第三乘法第八層四減數置第一三減四除四乘又九十乘二除卽第一四減計其乘除則先用四除而乘亦起四次起九十乘而亦加二除雖圖止十一率而其例可遞推也而第九層減餘首位六萬二千一百三十六爲十一率分子卽第四乘法細按數根及各減數其乘除之例秩然不紊則自十一率以下莫不皆然此割線用倍差求本弧立術之由也

割綫求餘弧

術曰先求各率分子爲遞次乘法　三乘單一以三自乘乘之得二十七爲數根又三乘單一以一自乘乘之又四五遞乘之二三遞除之得十爲初減數數根減初減得十七爲第一乘法　置前數根以五自乘乘之得六百七十五爲數根置前初減以三自乘乘之又六七遞乘之四五遞除之得一百八十九爲初減數置前乘法以一自乘乘之又六七遞乘之二三遞除之得一百十九爲次減數數根減初減得四百八十六再減次減得三百六十七爲第二乘法五乘前數根以七自乘乘之得十六萬五千三百七十

五爲數根五乘前初減以五自乘乘之又八九遞乘之六七遞除之得四萬〇五百爲初減數五乘前次減以三自乘乘之又八九遞乘之四五遞除之得一萬九千二百七十八爲次減數五乘前乘法以一自乘乘之又八九遞乘之二三遞除之得二萬二千〇二十爲三減數數根減初減得十二萬四千八百七十五再減次減得十萬〇五千五百九十七再減三減得八萬三千五百七十七爲第三乘法　置前數根以九自乘乘之得一千三百三十九萬五千三百七十五爲數根置前初減以七自乘乘之又十與十一遞乘之八九遞除之得三百〇三萬一千八百七

十五爲初減數置前次減以五自乘乘之又十與十一遞乘之六七遞除之得一百二十六萬二千二百五十爲次減數置前三減以三自乘乘之又十與十一遞乘之四五遞除之得一百〇八萬九千九百九十爲三減數置前乘法以一自乘乘之又十與十一遞乘之二三遞除之得一百五十三萬二千二百四十五爲四減數數根減初減得一千〇三十六萬三千五百再減次減得九百十萬〇一千二百五十再減三減得八百〇一萬一千二百六十再減四減得六百四十七萬九千〇十五爲第四乘法　凡求數根及各減先用各奇數自乘乘之而逐次乘法遞

加（如第一乘法起三自乘第二起五自乘）亦挨次減數遞降（如第二乘法初減用三自乘次減用一自乘）次用耦奇二數乘而逐次乘法遞加亦用耦奇二數除而挨次減數遞降又間位加奇數乘如是遞求得各率分子即爲遞次乘法

乃以餘割爲第一數正　次以餘割爲一率半徑爲二率二率自乘一率除之得三率二三遞除之爲第二數負　又以三率自乘二率除之得四率于是三除第二數以四率乘之二率除之爲第五率四五遞除之爲七率用數第一乘法乘之爲第三數負

置七率用數四率乘之二率除之爲第七率六七遞除之爲九率用數第二乘法乘之爲第四數負　五

除九率用數四率乘之二率除之爲第九率八九遞
除之爲十一率用數第三乘法乘之爲第五數負
置十一率用數四率乘之二率除之爲十一率十與
十一遞除之爲十三率用數第四乘法乘之爲第六
數負　凡乘除之例同餘弧求割綫如是遞求至單
位下乃并諸負數減第一正數所得爲以半徑爲二
率餘弧爲三率之第一率以半徑自乘求得數除之
得餘弧以減象限得本弧

解曰割綫求餘弧若依切線求本弧還原之法而
分子之由來不可見夫餘弧之割線與半徑與本
弧之正弦爲三率連比例則以半徑爲二率自乘

爲實正弦求本弧率分各降一率除之其所得亦與用還原法同其一率即爲割線而所得爲以半徑爲二率餘弧爲三率之第一率與切線求餘弧同既由一次除法則分子之由來可見今依泰西杜氏演得降率正弦求本弧率分爲三率一又五率二三分之一又七率二三四五分之九又九率自二至七分之二百二十五又十一率自二至九分之一萬一千〇二十五又十三率自二至十一分之八十九萬三千〇二十五爲割綫求餘弧之除法也

推演割綫求餘弧總圖

	三乘三	三乘五	三乘七	三乘九	三乘十一
一	二三 〇	二三四五 〇	二三四五六七 〇	二三四五六七八九 〇	二三四五六七八九十十一 〇
	𝍠	𝍢	𝍤𝍡𝍧	𝍥〇𝍡𝍢	𝍢𝍢𝍠〇𝍢
	𝍥	𝍣	𝍤𝍡𝍨	𝍥〇𝍡𝍨	𝍢𝍢〇𝍨
商實法式	二三 𝍥 二二 𝍥 〇	二三四五 二三 二三	二三四五六七 二三四五 二三	二三四五六七八九 二三四五六七 二三	二三四五六七八九十十一 二三四五六七八九 二三
層次商同母式		二三除 四五乘三乘 七〇	二三除 六七乘三乘	二三除 八九乘三乘五乘 〇〇	二三除 十十一乘三乘五乘
七層三商實		[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
層三商乘法式		二三四五三 〇	二三 二三四五三	二三四五 二三四五三	二三四五六七 二三四五三
九層三商同母式			二三四五除 四五六七乘	二三四五除 五六七八乘五乘	二三四五除 八九十十一乘五乘 〇
十層四商實			[illegible]	[illegible]	〇
十一層四商乘法式			二三四五六七三 〇	二三 二三四五六七三	二三四五 二三四五六七三
十二層四商同母式				二三四五六七除 四五六七八九乘五乘 〇	二三四五六七除 六七八九十十一乘五乘 〇
十三層五商實				[illegible]	〇
十四層五商乘法式				二三四五六七八九三五 〇	二三 二三四五六七八九
十五層五商同母式					二三四五六七八九除 四五六七八九十十一乘
十六層六商實					[illegible]
十七層六商乘法式					二三四五六七八九十十一 〇

一層初商實
二層初商乘法式
三層次商實
四層添毋次
五層次商乘

三率乘十一率
二三四五六七八九十十一
〇

三率乘九率
二三四五六七八九
〇

如圖先置二率半徑自乘所得如首層三率乘一率一為初商實以降率正弦求弧背率分除之以除法首位約初商實得一率一即為初商以乘除法所得如次層二率乘一率一又三率乘三率二三分之一又三率乘五率二三四五分之九又三率乘七率自二至七分之二百二十五又三率乘九率自二至九分之一萬一千〇二十五又三率乘十一率自

三層 / 次層 / 首層	一率三乘	三率三乘	五率三乘	七率三乘
首層	○	二三○	二三四五○	二三四五六七○
次層	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
三層	○	[illegible]	[illegible]	[illegible]

二至十一分之八十九萬三千〇二十五爲初商乘法式以減初商實得三層少三率乘三率二三分之一少三率乘五率二三四五分之九少三率乘七率自二至七分之二百二十五少三率乘九率自二至九分之一萬一千〇二十五少三率乘十一率自二至十一分之八十九萬三千〇二十五爲次商實次商以下分子多不受除故次商應添間位奇數分母自三率乘五率以下應加三乘自三率乘九率以下再加五乘通計求得如四層少三率乘三率二三分之一少三率乘五率二

四層	三乘三 率 率 二三 [illegible]	三乘五 率 率 二三四五 三 [illegible]	三乘七 率 率 二三四五六七 三 [illegible]	三乘九 率 率 二三四五六七八九 三 五 [illegible]	三乘十一 率 率 二三四五六七八七十十一 三 五 [illegible]
五層	二三 [illegible]	二三 二三 [illegible]	二三四五 二三 [illegible]	二三四五六七 二三 [illegible]	二三四五六七八九 二三 [illegible]
六層	〇	二三除 四五乘 三乘 十〇	二三除 六七乘 三乘 [illegible]	二三除 八九乘 三乘五乘 [illegible]	二三除 十十一乘 三乘五乘 [illegible]
七層		[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]

三四五分又三分之二十七少三
率乘七率自二至七分又三分之
六百七十五少三率乘九率自二
至九分又三分又五分之十六萬
五千三百七十五少三率乘十一
率自二至十一分又三分又五分
之一千三百三十九萬五千三百
七十五爲添毋次商實　置首位
以除法首位三率一約之得少三
率二三分之一　卽爲次商以乘除
法得五層少三率乘三率二三分

之一少三率乘五率二三分又二三分之一少三
率乘七率二三四五分又二三分之九少三率乘
九率自二至七分又二三分之二百二十五少三
率乘十一率自二至九分又二三分之一萬一千
〇二十五爲次商乘法式應減次商實其少三率
乘三率二三分之一　減盡其三率乘五率原實分
母係二三四五分又三分次商實分母係二三分
又二三分應以二三除之又四五乘之又三乘之
以同其母其三率乘七率原實分母係自二至七
分又三分乘法式係二三四五分又二三分應以
二三除之六七乘之又三乘之其三率乘九率原

實分母係自二至九分又三分又五分乘法式係自二至七分又二三分應以二三除之八九乘之又三乘五乘之其三率乘十一率原實分母係自二至十一分又三分又五分乘法式係自二至九分又二三分應以二三除之十與十一乘之又三乘五乘之通計乘除得如六層少三率乘五率二三四五分又三分之十少三率乘七率自二至七分又三分之一百八十九少三率乘九率自二至九分又三分又五分之四萬〇五百少三率乘十一率自二至十一分又三分又五分之三百〇三萬一千八百七十五爲次商同母式以減次商實

得七層少三率乘五率二三四五分又三分之十
七少三率乘七率自二至七分又三分之四百八
十六少三率乘九率自二至九分又三分又五分
之十二萬四千八百七十五少三率乘十一率自
二至十一分又三分又五分之一千○三十六萬
三千五百爲三商實
置三商實首位少三率乘五率二三四五分又三
分之十七以除法首位約之得少五率二三四五
分又三分之十七卽爲三商以乘除法得八層少
三率乘五率二三四五分又三分之十七少三率
乘七率二三分又二三四五分又三分之十七少

七層	三率乘五率 二三四五 三 三 [illegible]	三率乘七率 二三四五六七 三 [illegible]	三率乘九率 二三四五六七八九 三 五 [illegible]	三率乘十一率 二三四五六七八九十十一 三 五 [illegible]
八層	二三四五 三 三 [illegible]	二二 三三 四五 三 三 [illegible]	二三四五 二三四五 三 三 [illegible]	三三四五六七 二三四五 三 [illegible]
九層	〇	二三四五除 四五六七乘 [illegible]	二三四五除 六七八九乘 五乘 [illegible]	二三四五除 八九十十一乘 五乘 [illegible]
十層		[illegible]	[illegible]	[illegible]

三率乘九率二三四五分又二三四五分又三分之一百五十三少三率乘十一率自二至七分又二三四五分又三分之三千八百二十五為三商乘法式應減三商實其首位少三率乘五率二三四五分又三分之十七減盡其三率乘七率原實分母係自二至七分又三分乘法式係二三分又二三四五分又三分應以二三四五除之四五六七乘之以同其母其三率

乘九率原實分母係自二至九分又三分又五分乘法式係二三四五分又二三四五分又三分應以二三四五除之六七八九乘之又五乘之其三率乘十一率原實分母係自二至十一分又三分又五分乘法式係自二至七分又二三四五分又三分應以二三四五除之八九十十一乘之又五乘之通計乘除得如九層少三率乘七率自二至七分又三分之一百十九少三率乘九率自二至九分又三分又五分之一萬九千二百七十八少三率乘十一率自二至十一分又三分又五分之一百二十六萬二千二百五十爲三商同母式以

減三商實得十層少三率乘七率自二至七分又三分之三百六十七少三率乘九率自二至九分又三分又五分之十萬〇五千五百九十七少三率乘十一率自二至十一分又三分又五分之九百十萬〇一千二百五十爲四商實

置四商實首位少三率乘七率自二至七分又三分之三百六十七以除法首位約之得少七率自二至七分又三分之三百六十七即爲四商以乘除法得十一層少三率乘七率自二至七分又三分之三百六十七少三率乘九率二三分又自二至七分又三分之三百六十七少三率乘十一率

層			
十層	三率乘十一率 二三四五六七八九十十一上 三 五 [illegible]	三率乘九率 二三四五六七八九 三 五 [illegible]	三率乘七率 二三四五六七 三 [illegible]
十一層	二三四五 二三四五六七 三 [illegible]	二三 二三四五六七 三 [illegible]	二三四五六七 三 [illegible]
十二層	二三四五六七除 六七八九十十一乘 五乘 [illegible]	二三四五六七除 四五六七八九乘 五乘 [illegible]	〇
十三層	[illegible]	[illegible]	

二三四五分又自二至七分又三分之三千三百〇三爲四商乘法式應減四商實其首位少三率乘七率自二至七分又三分之三百六十七減盡其三率乘九率原實分母係自二至九分又三分又五分乘法式係二三分又自二至七分又三分應以自二至七除之自四至九乘之又五乘之以同其母其三率乘十一率原實分母係自二至十一分又三分又五分乘法式係

二三四五分又自二至七分又三分應以自二至七除之自六至十一乘之又五乘之通計乘除得十二層少三率乘九率自二至九分又三分又五分之二萬二千〇二十少三率乘十一率自二至十一分又三分又五分之一百〇八萬九千九百九十爲四商同母式以減四商實得十三層少三率乘九率自二至九分又三分又五分之八萬三千五百七十七少三率乘十一率自二至十一分又三分又五分之八百〇一萬一千二百六十爲五商實

置五商實首位三率乘九率自二至九分又三分

又五分之八萬三千五百七十七以除法首位約之得少九率自二至九分又三分又五分之八萬三千五百七十七即爲五商以乘除法得十四層

層	乘十一率	乘九率
十三層	三率乘十一率 二三四五六七八九十十一 三 五	三率乘九率 二三四五六七八九 三 五
十四層	二三 二三四五六七八九 三 五	二三四五六七八九 三 五
十五層	除 二三四五六七八九 乘 四五六七八九十十一	○
十六層		

少三率乘九率自二至九分又三分又五分之八萬三千五百七十七少三率乘十一率二三分又自二至九分又三分又五分之八萬三千五百七十七爲五商乘法式應減五商實其首位少三率乘九率自二至九分又三分又五分之八萬三千五百七十七減盡其三率乘十一率原

實分母係自二至十一分又三分又五分乘法式
分母係二三分又自二至九分又三分又五分應
以自二至九除之自四至十一乘之以同其母計
乘除得十五層少三率乘十一率自二至十一分
又三分又五分之一百五十三萬二千二百四十
五為五商同母式以減五商實得十六層少三率
乘十一率自二至十一分又三分又五分之六百
四十七萬九千〇十五為六商實
置六商實以除法首位約之得少十一率自二至
十一分又三分又五分之六百四十七萬九千〇
十五即為六商以乘除法得十七層少三率乘十

九率	十率		十一率
二三四五六七八九	二三四五六七八九十	共層	二三四五六七八九十十一
三 五	二 五		三 五
[illegible]	[illegible]		[illegible]
五商	六商	七層	二三四五六七八九十十一 三 五 [illegible]

一率自二至十一分又三分又五分之六百四十七萬九千〇十五爲六商乘法式以减六商實徧盡通計得割綫求餘弧爲三率之一率之一率其各率分數爲一率一少三率二三分之一少五率二三四五分又三分之十七少七率自二至七分又三分之三百六十七少九率自二至九分又三分又五分之八萬三千五百七十七少十一率自二至十一分又三分又五分之六百四十七萬九千〇十五也

細審割綫求餘弧各率分數其分母與餘弧

四商	三商	次商	初商
七率 二三四五六七	五率 二三四五	三率 二三	一率

一一三三五五七七九九	一一三三五五七七	一一三三五五	一一三三	一一

求割綫同是其逐率除法亦與餘弧求割綫同于是審其分子之由來因此次以正弦求本弧率分為除法其分子非盡單一當先審除法分子之由來盡正弦求本弧分子為以各奇數自乘而又逐率疊乘之數起于三率之單一其五率分子為兩次一乘單一故仍為一其七率分子為一與一一三三疊乘之九其九率分子為一與一一三三五五疊乘之二百二十五其十一率分子為一與一一三三五五七七疊乘之一萬一千〇二十四其十三率分子為一與一一三三五五七七九九疊乘之八

十四萬三千〇二十五于是由前圖添除法降位加乘爲第二圖其添母次商實分子爲數根其五率分子起一一三三疊乘又三乘是以三自乘乘三乘單一卽第一數根也其七率分子爲一一三三五五疊乘又三乘以較五率分子惟多五五乘是以第一數根以五自乘乘之卽第二數根也其九率分子爲一一三三五五七七疊乘又三乘又五乘以較七率分子惟多七七乘又五乘是置七率分子以七自乘乘之又五乘之卽第三數根也其十一率分子爲一一三三五五七七九九疊

除乘 九十一

乘又三乘

次商實分子	一三 一三乘 三乘 [illegible]	一三五 一三五乘 三乘 [illegible]	一三五七 一三五七乘 三乘五乘 [illegible]	一三五七九 一三五七九乘 三乘五乘 [illegible]
同母式分子	一 一乘 二三除 四五乘 三乘 七〇	一三 一三乘 二三除 六七乘 三乘 [illegible]	一三五 一三五乘 二三除 八九乘 三乘五乘 [illegible]	一三五七 一三五七乘 二三除 十十一乘 三乘五乘 [illegible]
減餘數	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
同母式分子		二 一乘 二三四五除 四五六七乘 [illegible]	一三 一三乘 二三四五除 六七八九乘 五乘 [illegible]	一三五 一三五乘 二三四五除 八九十十一乘 五乘 [illegible]
減餘數		[illegible]	[illegible]	[illegible]
同母式分子			二 一乘 二三四五六七除 四五六七八九乘 五乘 [illegible]	二三 一三乘 二三四五六七除 六七八九十十一乘 五乘 [illegible]
減餘數			[illegible]	[illegible]
同母式分子				二 一乘 二三四五六七八 四五六七八九十 [illegible]
減餘數				[illegible]

又五乘以較九率分子惟多九九乘是置九率分子以九自乘乘之即第四數根也其初減起單一五率初減用一

添母 根數

次商 初減數

三商 次減數

四商 三減數

五商 四減數

一乘又二

三除四五

乘又三乘七率初減用一一三三乘又二三除六七乘又三乘以較五率初減惟多三三乘及六七乘少四五乘是置五率初減以三自乘乘之又四五除之六七乘之卽七率初減也九乘初減一一三三五五疊乘又二三除八九乘又三乘五乘以較七率初減惟多五五乘及八九乘又五乘少六七乘是置七率初減又五自乘乘之又六七除之八九乘之又五乘之卽九率初減也其十一率初減一一三三五五七七疊乘又二三除十與十一

乘又三乘五乘以較九率初減惟多七七乘及十與十一乘少八九乘是置九率初減以七自乘乘之又八九除之十與十一乘之即十一率初減也而第一減餘即爲五率分子其次減數皆根于五率分子之十七其七率次減一一乘又二三四五除四五六七乘而四五乘除可相抵是二三除六七乘也九率次減一一三乘又二三四五除六七八九乘又五乘以較七率次減惟多三三乘及八九乘又五乘少四五乘是置七率次減以三自乘乘之又四五除之八九乘之又五乘之即九率次減也其十一率次減一一三三五五疊乘又二

三四五除八九十與十一乘又五乘以較九率次減惟多五五乘及十與十一乘少六七乘是置九率次減以五自乘乘之又六七除之十與十一乘之即十一率次減也而第一減餘即爲七率分子其三減數皆根于七率分子之三百六十七九率三減一一乘又自二至七除自四至九乘又五乘而四五六七乘除可相抵是二三除八九乘也十一率三減一一三疊乘又自二至七除自六至十一乘又五乘以較九率三減惟多三三乘又十與十一乘少四五乘是置九率三減以三自乘乘之又四五除之十與十一乘之即十一率三減也

而第一減餘卽爲九率分子其四減數根于九率
分子之八萬三千五百七十七其十一率四減一
一乘又自二至九除自四至十一乘而四五六七
八九乘除可相抵是二三除十與十一乘也而減
餘六百四十九萬八千〇十五卽爲十一率分子
復由前圖爲第三圖第一層爲添毋次商實分子
卽數根置首位單一以一自乘乘之又三乘之爲
第一數根再以五自乘乘之爲第二數根再以七
自乘乘之又五乘之爲第三數根再以九自乘乘
之爲第四數根通計其乘法皆用奇數自乘乘之
又間位加一奇數乘而首位單一卽三率分子第

九九乘

七七乘 八七除 十十一乘

五五乘 六七除 十十一乘

三三乘 四五除 十十一乘

一三乘 二三除 十十一乘

七七乘 五乘

五五乘 六七除 八九乘 五乘

三三乘 四五除 八九乘 五乘

一三乘 二三除 八九乘 五乘

五五乘

三三乘 四五除 六七乘

一三乘 二三除 六七乘

三三乘 三乘

一一乘 二三除 四五乘 三乘

二層初減數以三率分子爲實以一自乘乘之又二三除四五乘又三乘爲第一初減再以三自乘乘之又四

五除六七乘爲第二初減再以五自乘乘之又六七除八九乘又五乘爲第三初減再以七自乘乘之又八九除十與十一乘爲第四初減通計其乘除先以各奇數自乘乘之次起二三除而遞加再起四五乘而遞加亦間位加一奇數乘第三層減

餘首位五率分子十七即第一乘法第四層次減數以五率分子爲實以一自乘乘之又二三除六七乘爲第一次減再以三自乘乘之又四五除八九乘又五乘爲第二次減再以五自乘乘之又六七除十與十一乘爲第三次減通計其乘除亦先以各奇數自乘乘之次起二三除而遞加再起六七乘而遞加亦間位加一奇數乘第五層減餘首位七率分子三百六十七即第二乘法第六層三減數以七率分子爲實以一自乘乘之又二三除八九乘又五乘爲第一三減再以三自乘乘之又四五除十與十一乘爲第二三減通計其乘除亦

先以各奇數自乘乘之次起二三除而遞加再起八九乘而遞加亦間位加一奇數乘第七層減餘首位九率分子八萬三千五百七十七卽第三乘法第八層四減數以九率分子爲實以一自乘乘之又二三除十與十一乘爲第一四減計其乘除亦先用奇數自乘乘之次起二三除再起十與十一乘而間位奇數乘法雖未見已可據前諸減而例推也第九層減餘十一率分子六百四十七萬九千〇十五卽第五乘法細按數根及諸減數其迭次乘除之例横豎不紊則自十一率以下可以遞推而逐率自爲分子與餘弧求割綫同故先求

用數此割綫求餘弧立術之由也

割綫求半弧

術曰先求各率分子爲遞次乘法　置單一以三四遞乘之又一乘三除得四爲初并數初并數又爲末并數并二數得八爲第一乘法　置前初并五六遞乘之又三乘五除得七十二爲初并數置前末并五六遞乘之又一乘三除得四十爲次并數初并數又爲末并數并三數得一百八十四爲第二乘法　置前初并以七八遞乘之又五乘七除得二千八百八十爲初并數置前次并七八遞乘之又三乘五除得一千三百四十四爲次并數置前末并七八遞乘之又一乘三除得一千三百四十四爲三并數初并數又爲

末并數并四數得八千四百四十八爲第三乘法置前初并以九十遞乘之又七乘九除得二十萬〇一千六百爲初并數置前次并以九十遞乘之又五乘七除得八萬六千四百爲次并數置前三并以九十遞乘之又三乘五除得七萬二千五百三十六爲三并數置前末并九十遞乘之又一乘三除得八萬六千四百爲四并數初并數又爲末并數并五數得六十四萬八千五百七十六爲第四乘法　凡求各并數先用奇耦二數乘而逐次乘法遞加如第一乘法用三四乘第二乘法用五六乘　次用相連兩奇數一乘一除而逐次并數遞降如第三乘法初并五乘七除次并三乘五除三并一乘三除　其初并即爲

末并乘法降一位則多一并如是遞求得各率分子即爲遞次乘法

乃以割綫與半徑相加爲一率又相減爲二率半徑爲三率求得四率爲半弧切綫三率謂以半徑爲連比例第一率切綫爲二率之三率爲第一數正　次以半徑爲連比例一率半弧切綫三率爲三率置第一數以三率乘之一率除之得五率三四遞除之爲七率用數第一乘法乘之爲第二數負　置七率用數以三率乘之一率除之得七率五六遞除之爲九率用數第二乘法乘之爲第三數正　置九率用數以三率乘之一率除之得九率七八遞除之爲十一率用數第三乘法乘之

爲第四數負　置十一率用數以三率乘之一率除之得十一率九十遞除之爲十一率用數第四乘法乘之爲第五數正　如是遞求至單位下乃并諸正數又并諸負數減之所得爲以半徑爲一率半弧爲二率之三率與一率半徑相乘平方開之得半弧

解曰割線與半徑相加減之比同于半徑與半弧切線三率之比也

如圖甲乙爲本弧甲丙爲半弧已戊爲本弧割綫已庚同已甲爲半徑戊甲爲割綫半徑差庚甲爲割綫半徑和甲壬爲半弧切綫甲丁爲半弧切綫三率凡句股形內立中股則大句與中股與小句必爲三率連比例今丁壬巳形以甲巳半徑

爲大句以甲壬半弧切線爲中股則甲丁小句必爲半弧切線三率矣

庚甲戊辛大句股形與己甲丁壬小句股形爲同式故以大形之大句庚甲爲割線半徑和比大形之小句甲戊爲割線半徑差若小形之大句己甲爲半徑與小形之小句甲丁爲半弧切線三率也

一率　大形大句庚甲割線半徑和

二率　大形小句甲戊割線半徑差

三率　小形大句己甲半徑

四率　小形小句丁甲半弧切綫三率

有切線二率可求弧背則有切線三率即可求弧背爲二率之三率其法置切線求本弧率分自乘以一率半徑除之即得切線三率求弧背三率率分但用切線求本弧分母則分子奇零必使與割綫求本弧分母相同則分子方無奇零應取切綫求本弧率分其四率以四乘其六率以三四與六乘其八率三四五六與八乘其十率三四五六七八與十乘通計乘得二率一少四率三四分之四多六率三四五六分之七十二少八率自三至八分之二千八百八十多十率自三至十分之二十萬〇一千六百爲添母切線求本弧率分也

推演割線求半弧總圖

三	一乘五 三四	一乘七 三四五六	一乘九 三四五六七八	一乘十一 三四五六七八九十
	三 卜	五 丨	七 卜	九 丨
	三除 三四乘 卌	五除 三四五六乘 ⊥川	七除 三四五六七八乘 三川上〇	九除 三四五六七八九十乘 二〇一丅〇〇
法式	三四 卌	三四 三 川	三四 五 卌	三四 七 川
母式	卌	三除 五六乘 三〇	五除 五六七八乘 一川三卌	七除 五六七八九十除 丌丄川〇〇
六層率乘法式		三四五六 ⊥川	三四五六 三 ⊥卌	三四五 五 ⊥川
層第三同母式		⊥川	三除 七八乘 一川三卌	五除 七八九十乘 丌川川丅
七層八率乘法式			三四五六七八 三川上〇	三四五六七八 三 三川上〇
八層第四同母式			三川上〇	三除 九十乘 丌川上〇
九層第五同母式				三四五六七八九十 二〇一丅〇〇
	丌	⊥川	三川三丌	一川三川丅

乘
一〇
式法乘率二層一
式母同一第二層二
乘率四層三
同二第層四
五
六

如圖先置添母切線求本弧率分分母爲定母然後以添母切線求本弧率分爲實以切線求本[illegible]率分母不添二率一少四率三分之一多六率五分之一少八率七分之一多十率九分之一爲法乘之先置原實首位二率一偏乘乘法所得如首層一率乘三率一少一率乘五率三分之一多一率乘七率五分之一少一率乘九率七分之一多一率乘十一率九分之一爲二率乘法式其一率乘

	一率乘三率 〇	一率乘五率 三四	一率乘七率 三四五六	一率乘九率 三四五六七八	一率乘十一率 三四五六七八九十
首層	丨	三 卜	五 丨	七 卜	九 丨
次層	丨	三除 三四乘 卌	五除 三四五六乘 =川	七除 三四五六七八乘 =丌〸〇	九除 三四五六七八九十乘 二〇一丅二〇

五率定母係三四分乘法式分母係三分應以三除之三四乘之以同其母其一率乘七率定母係三四五六分乘法式係五分應以五除之三四五六乘之其一率乘九率定母係自三至八分乘法式係七分應以七除之自三至八乘之其一率乘十一率定母係自三至十分乘法式係九分應以九除之自三至十乘之通計乘除得如次層一率乘三率一少一率乘五率三四分之四多一率乘七率三四五六分之七十二少一率乘九率自三至八分之二

千八百八十多一率乘十一率自三至十分之二十萬〇一千六百為第一同母式、

次置原實次位少四率三四分之四偏乘乘法所得如三層少一率乘五率三四分之四多一率乘七率三四分又三分之四少一率乘九率三四分又五分之四多一率乘十一率三四分又七分之四為四率乘法式其一率乘七率定母係三四五六分乘法式係三四分又三分應以三除之五六乘之以同其母其一率乘九率定母係自三至八分乘

	一率乘十一率	一率乘九率	一率乘七率	一率乘五率
	三四五六七八九十	三四五六七八	三四五六	三四
三層	三四 七 ‖‖	三四 五 卌	三四 三 ‖‖	三四 卌
	七除 五六七八九十乘	五除 五六七八乘	三除 五六乘	
四層	‖‖⊥‖‖○○	一‖三‖‖	三○	卌

法式係三四分又五分應以五除之五六七八乘之其一率乘十一率定母係自三至十分乘法式係三四分又七分應以七除之自五至十乘之通計乘除得如四層少一率乘五率三四分之四多一率乘七率三四五六之四少一率乘九率自三至八分之一千三百四十四多一率乘十一率自三至十分之八萬六千四百爲第二同母式

次置原實三位六率三四五六分之七十二偏乘乘法所得如五層一率乘七率三四五六分之七十二少一率乘九率三四五六分又三分之七十二多一率乘十一率三四五六分又五分之七十

	一率乘十一率	一率乘九率	一率乘七率
	三四五六七八九十	三四五六七八	三四五六
五層	三四五六 五 丄川	三四五六 三 丄卅	三四五六 丄川
六層	五除 七八九十乘 丌三川丄丁	三除 七八乘 一川三卅	丄川

二爲六率乘法式其一率乘九率定母係自三至八分乘法式係三四五六分又三分應以三除之七八乘之其一率乘十一率定母係自三至十分乘法式係三四五六分又五分應以五除之七八九十乘之通計乘除得如六層一率乘七率三四五六分之七十二少一率乘九率自三至八分之一千三百四十四多一率乘十一率自三至十分之七萬二千五百七十六爲第三同母式

次置原實四位少八率自三至八分之二千八百

一率乘九率	一率乘十率
三四五六七八	三四五六七八九十
三四五六七八 𝍪𝍧𝍰八	三四五六七八 三 𝍩𝍧𝍫〇
𝍪𝍧𝍰〇	三除 九十乘 𝍡𝍤𝍢〇〇

七層 八層

八十徧乘乘法所得如七層少一率乘九率自三至八分之二千八百八十多一率乘十一率自三至八分又三分之二千八百八十為八率乘法式其一率乘十一率定母係自三至十分乘法式係自三至八分又三分應以三除之九十乘之計乘除得如八層少一率乘九率自三至八分之二千八百八十多一率乘十一率自三至十分之八萬四千六百為第四同母式

次置原實五位十率自三至十分之二十萬〇一千六百乘乘法得九層一率乘十一率自三至十

十一率 乘 率 三四五六七八九十	三四五六七八九十 二〇一丁〇〇	十一率 三四五六七八九十 [illegible]	九率 三四五六七八 [illegible]	七率 三四五六 [illegible]	五率 三四 [illegible]

分之二十萬〇一千六百爲十率乘法式即爲第五同母式乃以諸同母式相并得一率乘三率一少一率乘五率三四分之八多一率乘七率三四五六分之一百八十四少一率九乘九率自三至八分之八千四百四十八多一率乘十一率自三至十分之六十四萬八千五百七十六爲切線求本弧率分自乘數于是以一率半徑除之得三率一少五率三四分之八多七率三四五六分之一百八十四少九率自三至八分之八千四百四十八多十一率自三至十分之六十四萬八千五百七十六爲切線

率三〇一

三率求弧背三率之各率分數也

細審切線三率求弧背率分其分母與割綫求本弧同是其各率除法必自三四而五六亦與割線求本弧同矣于是審其分子之由乃由前圖變爲第二圖其初并數起單一五率初并三除三四乘七率初并五除三四五六乘以較五率初并多五除及五六乘少三除是以五六初并三乘五除又五六乘之卽七率初并也其九率初并七除自三至八乘以較七率初并多七除及七八乘少五除是以七率初并五乘七除又七八乘之卽九率初并也十一率初并九除自三至十乘以較九率初

同母式分子	[illegible]	三除 三四乘 [illegible]	五除 三四五六乘 [illegible]	七除 三四五六七八乘 [illegible]	九除 三四五六七八九十乘 [illegible]
同母式分子		[illegible]	三除 五六乘 [illegible]	五除 五六七八乘 [illegible]	七除 五六七八九十乘 [illegible]
同母式分子			[illegible]	三除 七八乘 [illegible]	五除 七八九十乘 [illegible]
同母式分子				[illegible]	三除 九十乘 [illegible]
同母式分子	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible] [illegible]

并多九除及九十乘少七除是以九率初并七乘九除又九十乘之即十一率初并也其次并數皆根于五率次并之四亦即五率末并七率次并三除五六乘九率次并五除五六七八乘以較七率次并多五除及七八乘少三除是以七率次并三乘五除又七八乘之即九率次并也十一率次并七除自五至十乘以較九率次并多七除及九

第一數	第二數	第三數	第四數	第五數
初并	次并	三并	四并	五并

十乘少五除是以九率次并五乘七除又九十乘之即十一率次并也其三并數皆根於七率初并之七十二亦初七率末并九率三并三除七八乘十一率三并五除七八九十乘以較九率三并多五除及九十乘少三除是以九率三并三乘五除又九十乘之即十一率三并也其四并數皆根於九率初并亦即九率末并十一率四并三除九十乘其五并數皆根於十一率初并亦即十一率末并

復由前圖為第三圖第一層初并數以三率分子

[illegible]	一乘三除 三四乘 [illegible]	三乘五除 五六乘 [illegible]	五乘七除 七八乘 二[illegible]〇	七乘九除 九十乘 二〇[illegible]〇〇
	[illegible]	一乘三除 五六乘 [illegible]〇	三乘五除 七八乘 [illegible]	五乘七除 九十乘 [illegible]
		[illegible]	一乘三除 七八乘 [illegible]	三乘五除 九十乘 [illegible]
			[illegible]〇	一乘三除 九十乘 [illegible]〇
				二〇[illegible]〇〇
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]

單一爲實一乘三除原圖無一乘茲加一乘則遞求之例益顯又三四乘之爲第一初并再加三乘五除又五六乘之爲第二初并再加五乘七除又七八乘之爲第三初并再加七乘九除又九十乘之爲第四初并通計其乘除先以相連兩奇數一乘一除再起三四乘而遞加而第一五率初并即五率末并二數得八爲五率分子即第一乘法第一層次并數以五率末并爲實一乘三除又五六乘之爲第一次并再加三乘五除又七

八乘之爲第二次幷再加五乘七除又九十乘之爲第三次幷通計其乘除亦以相連兩奇數一乘一除再起五六乘而遞加而第二七率初幷即七率末幷幷三數即得一百八十四爲七率分子即第二乘法第三層三幷數以七率末幷爲實一乘三除又七八乘之爲第一三幷再加三乘五除又九十乘之爲第二三幷通計其乘除亦用兩奇數一乘一除再起七八乘而遞加而第三九率初幷即九率末幷幷四數得二千八百八十爲九率分子即第三乘法第四層四幷數以九率末幷爲實一乘三除又九十乘之爲第一四幷計其乘除亦

用兩奇數一乘一除而起九十乘而第四十一率初并即十一率末并并并五數得六十四萬八千五百七十六爲十一率分子即第四乘法細按求各并數其挨次乘除之例秩然不紊則自十一率以下可類推而逐率自爲分子與割綫求本弧同故先求用數此割綫求半弧借用切線三率立術之由也

是術乘法其初并以下末并以上各并數恆兩兩相對而同數如第三乘法次并同三并第四乘法次并同四并是也故入算時均可省算茲之不省欲顯遞求之例耳

割綫求倍弧、

術曰割綫自乘冪與二之半徑自乘冪相減爲一率割綫自乘冪爲二率半徑爲三率求得四率如割綫冪小於二之半徑冪所得爲倍本弧割綫如割綫冪大於二之半徑冪所得爲倍餘弧割綫於是以倍弧割綫爲連比例一率半徑爲二率依割綫求餘弧法求得餘弧如係倍本弧割綫則以餘弧減象限如係倍餘弧割綫以餘弧加象限均得倍弧半之卽本弧

解曰凡半徑與割綫半徑和之比同於割線半徑差與本弧切線三率之比也

如圖甲乙爲本弧丁己爲半徑丁丙爲割線乙丙

爲切線乙戊爲本弧切線三率乙庚爲割綫半徑差乙已爲割線半徑和已丁乙辛句股形與戊庚乙丙句股形爲同式故以丁乙大形分句爲半徑比已乙大形大句爲割線半徑和若庚乙小形分句爲割線半徑差與戊乙小形大句爲本弧切線三率也

一率　大形分句　乙丁半徑

二率　大形大句　乙已割線半徑和

三率　小形分句　乙庚割線半徑差

四率　小形大句乙戊本弧切綫三率

又本弧在四十五度以內則本弧切線三率與半徑相加減之比同于半徑與倍本弧割線之比也

如圖甲乙爲本弧已甲同已乙爲倍弧已丁爲本弧切線已丙爲半徑丙丑同戊已爲本弧切線三率已癸同庚丙爲倍弧割綫丙壬同庚已爲倍弧割綫半徑差已子同戊已癸丙丁小句股形與庚已子壬辛大句股形爲同式故以癸丙小形兩句較爲切線三率與半徑之較比戊丙小形兩句總爲切線

三率與半徑之和若壬子大形兩句較爲全徑己子與庚己同亦與丑壬同與庚壬大形兩句和爲倍弧割之倍夫切線三率與半徑相加減之比既同於全徑與倍倍弧割綫之比則亦必同於半徑與倍弧割綫之比矣要而論之當以割綫半徑和與割綫半徑差相乘以半徑除之爲切線三率然後與半徑相加減爲一二率今不用半徑除但以割綫半徑和較相乘命爲半徑乘切綫三率如寅卯戊己面積與卯辰已癸同而轉與半徑羃卯午已丙面積相加減爲一二率其比例亦必與切線三率與半徑相加減同半徑千萬爲加一千萬倍之比例夫半徑乘切線三率

即切線冪也本以半徑除切綫冪為切綫三率其與半徑冪相和即割綫冪也其與半徑冪相較即割綫冪減兩段半徑冪也故以割綫冪減二之半徑冪為一率割綫冪為二率也

一率 辰癸午丙面積 兩半徑冪內減割綫冪

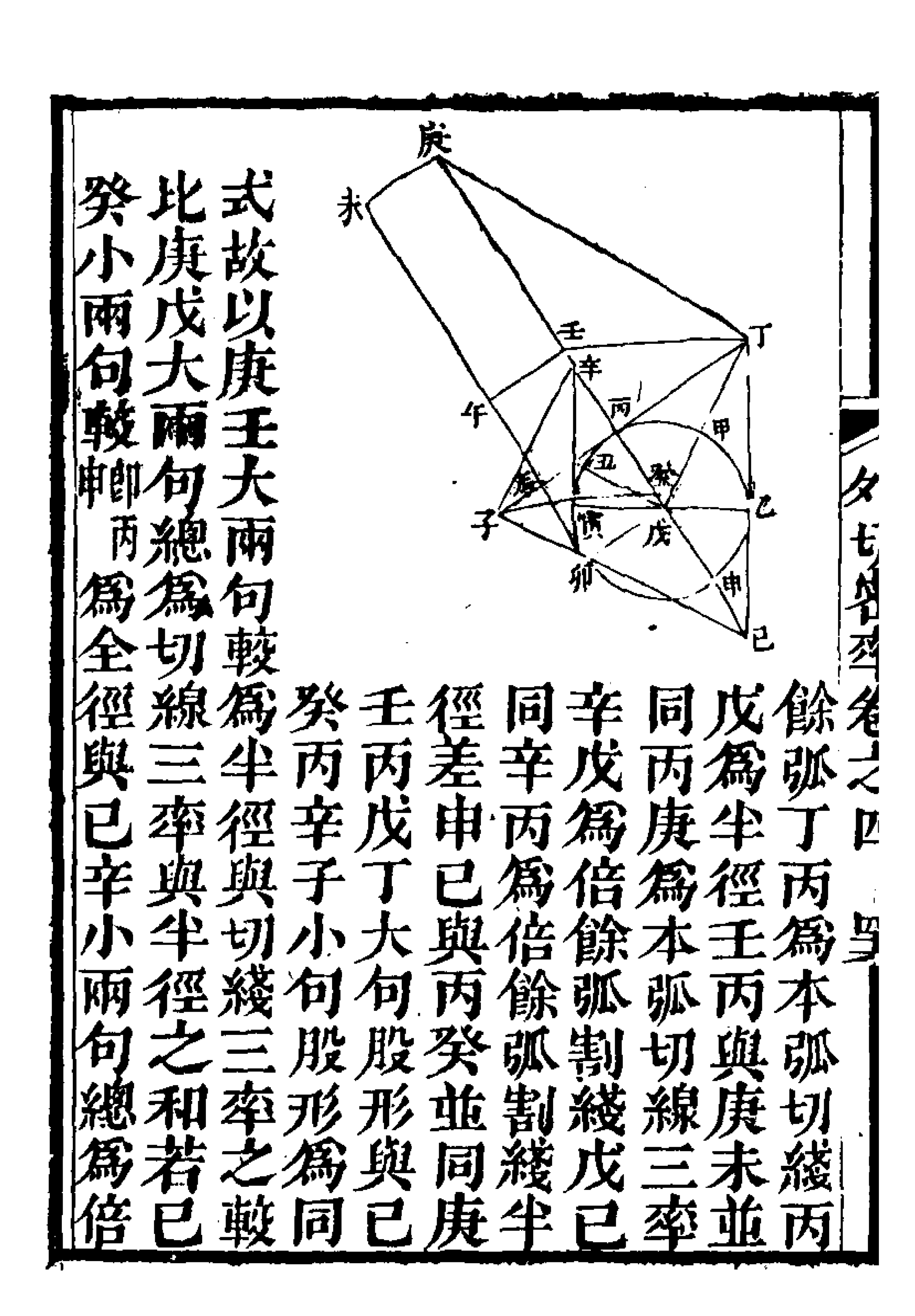
二率 寅戊午丙面積 割線冪

三率 子壬即己丑之半 半徑

四率 庚壬之半 倍本弧割綫

又本弧在四十五度以外則本弧切綫三率與半徑相加減之比同於半徑與倍餘弧割綫之比也

如圖丙甲為本弧甲乙同丙丑為餘弧丙寅為倍



餘弧丁丙為本弧切綫丙戊為半徑壬丙與庚未並同丙庚為本弧切線三率辛戊為倍餘弧割綫戊巳同辛丙為倍餘弧割綫半徑差申巳與丙癸並同庚壬丙戊丁大句股形與巳癸丙辛子小句股形為同式故以庚壬大兩句較為半徑與切綫三率之較比庚戊大兩句總為切線三率與半徑之和若巳癸小兩句較即丙申為全徑與巳辛小兩句總為倍

餘弧割線之倍夫庚壬與庚戊之比旣同於已癸與已辛之比則亦同於已癸之半卽丙申之半爲半徑與已辛之半之半爲倍餘弧割線之比矣而庚壬線與庚戊線之比又同於庚壬未午面積爲割綫𢍰內減二之半徑𢍰與庚戊未卯面積爲割綫𢍰之比則割綫𢍰內減二之半徑𢍰與割綫𢍰其比例亦必同於已癸之半卽丙戊與已辛之半矣

一率　庚壬未午面積　割綫𢍰內減兩半徑𢍰

二率　庚戊未卯面積　割綫𢍰

三率　已癸之半卽丙戊　半徑

四率　已辛之半　倍餘弧割綫

割線求弧背算式

割線求弧背雖分本弧餘弧二術而降位仍屬不易與切線求弧背同故復有求半弧求倍弧術亦借線求弧之意也茲將九十度分爲五限其自十秒至十五度則用割線求本弧之法求之其自十五度至三十度則用割綫求半弧法之其自三十度至四十五度則用割綫求倍本弧法求之其自四十五度至六十度則用割綫求倍餘弧法求之其自六十度至八十九度五十九分五十秒則用割線求餘弧法求之庶降位均無難矣

割線求本弧各率乘法表

五率	第一乘法	五
七率	第二乘法	六四
九率	第三乘法	一五六〇
十一率	第四乘法	六二二三六
十三率	第五乘法	三六八〇二八〇
十五率	第六乘法	三〇四〇〇〇〇〇〇

割綫求餘弧各率乘法表

率	乘法	數
五率	第一乘法	一七
七率	第二乘法	三六七
九率	第三乘法	八三五七七
十一率	第四乘法	六四七九〇二五
十三率	第五乘法	五三三九二四二八〇〇
十五率	第六乘法	八八一九六〇〇〇〇〇〇〇
十七率	第七乘法	一七五八〇八〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇
十九率	第八乘法	五〇六九〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇

割線求半弧各率乘法表

率	乘法	數
五率	第一乘法	八
七率	第二乘法	一八四
九率	第三乘法	八四四八
十一率	第四乘法	六四八五七六
十三率	第五乘法	七四九七二一六〇
十五率	第六乘法	一二七四六六〇〇〇〇
十七率	第七乘法	二六四三八五六六〇〇〇〇〇

乘法表中尾數不全列

凡設割綫自十秒至十五度則用割線求本弧法求之今將設割線一〇三五二七六一八〇

四 求其本弧算式列於後

法以割線內減半徑得三五二七六一八〇四為割線半徑差倍之得七〇五五二三六〇八為第一數正 次以半徑為一率倍差為三率置第一數以三率乘之一率除之得五率三除之四除之得四一四八〇二九六八為七率用數第一乘法五乘之得二〇七四〇一四八為第二數負 置七率用數以三率乘之一率除之得七率五除之六除之得九七五

五一○九六為九率用數第二乘法六四乘之得六二四三二七為第三數正　置九率用數以三率乘之一率除之得九率七除之八除之得○一二二九○一為十一率用數第三乘法一五六○乘之得一九一七三為第四數負　置十一率用數以三率乘之一率除之得十一率九除之十除之得○○○○九六八三四四為十三率用數第四乘法六二一三六乘之得五九九為第五數正　置十三率用數以三率乘之一率除之得十三率十一除之十二除之得○○○○○○○五一四五為十五率用數第五乘法三六八○二八○乘之得○一九為第六數

負　置十五率用數以三率乘之一率除之得十五率十三除之十四除之得〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇一九九以第六乘法三〇四〇〇〇〇〇乘之得〇〇一爲第七數正　乃并諸正數得七〇六一四八五三五以并諸負數二〇七五九三四〇減之得六八五三八九一九五爲以半徑爲一率本弧爲二率之第三率與半徑相乘平方開之得二六一七九九三八八爲本弧弧分檢弧綫表得十五度也

一率	三率
一〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇	七〇五五三三六〇八

七率用數	八	十一	十三
四一四八〇二九六八	九七五五一〇九六	一〇一二二九〇一	〇〇〇〇〇九六三四四

第一數	二	三	四	五	六	七	并正數	并負數	減得數		
七〇五五二三	二〇七四〇	六二四	一九				七〇六一四八	二〇七五九	六八五三八九	二六一七九九二	一〇〇〇〇〇〇
六〇八	一四八	三二七	一七三	五九九	一[illegible]	一	五三五	三四〇	一九五	八八	〇〇
									三率	二率	一率

凡設割綫自六十度至八十九度五十九分五十秒則用割線求餘弧法求之今將設割線二〇〇〇〇〇〇。求其餘弧算式列於後

法以割綫二〇〇〇〇〇〇〇。為第一數正 次

去
〇〇〇〇〇〇〇〇五一四五
〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇一九九

以割綫爲一率半徑爲二率二率自乘一率除之得五〇〇〇〇〇〇。爲三率二除之三除之得八三三三三三三爲第二數負　又以三率自乘二率除之得二五〇〇〇〇〇〇。爲四率於是三除第二數以四率乘之二率除之得五率四除之五除之得三四七二二二二二二爲七率用數第一乘法一七乘之得五九〇二七八爲第三數負　置七率用數以四率乘之二率除之得七率六除之七除之得二〇六六七九八九爲九率用數第二乘法三六七乘之得七五八五二爲第四數負　五除九率用數以四率乘之二率除之得九率八除之九除之得〇一四三

五二七七爲十一率用數第三乘法八三五七七乘之得一一九九六八爲第五數負　置十一率用數以四率乘之二率除之得十一率十除之十一除之得○○○○三二六一九九爲十三率用數第四乘法六四七九○一五乘之得二一一三爲第六數負　置十三率用數以四率乘之二率除之得十三率十二除之十三除之得○○○○○○○七四六七九爲十五率用數第五乘法五三二九二四二八○○乘之得三九八爲第七數負　置十五率用數以四率乘之二率除之得十五率十四除之十五除之得○○○○○○○○○○八九九爲十七率

用數第六乘法八八一九六○○○○○○○乘之
得七八為第八數　九除十七率用數以四率乘之
二率除之得十七率十六除之十七除之得○○○
○○○○○○○○○○○九一為十九率用數
第七乘法一七五八○八○○○○○○○○○
乘之得一七為第九數　置十九率用數以四率乘
之二率除之得十九率十八除之十九除之得○○
○○○○○○○○○○○○○○○六六以
第八乘法五○六九○○○○○○○○○○○
○○乘之得三為第十數負　乃幷諸負數得九○
一四○六八以減第一正數得一九○九八五九三

二爲以半徑爲二率餘弧爲三率之第一率以半徑自乘求得數除之得五二三五九八七七六爲餘弧弧分檢弧線表爲三十度以減象限得六十度即本

一率	二率	三率	四率
二	一		
○	○	五	二
○	○	○	五
○	○	○	○
○	○	○	○
○	○	○	○
○	○	○	○
○	○	○	○
○	○	○	○

七率用數		九	十一	十三	十五	十七	十九
三							
四							
七	二						
二	○						
二	六	○	○	○	○	○	○
二	六	一	○	○	○	○	○
二	七	四	○	○	○	○	○
二	九	三	○	○	○	○	○
	八	五	三	○	○	○	○
	九	二	二	○	○	○	○
		七	六	○	○	○	○
		七	一	○	○	○	○
			九	七	○	○	○
			九	四	○	○	○
				六	○	○	○
				七	八	○	○
				九	八	○	○
					九	○	○
						○	○
						九	○
						一	○
							○
							○
							六
							八
							六

第一數	二	三	四	五	六	七	八
二							
○							
○	八						
○	三	五					
○	三	九	七	一			
○	三	○	五	一	二		
○	三	二	八	九	一	三	
○	三	七	五	九	一	九	七
○	三	八	二	六	三	八	八

九十		并負數	減得數		
一七	三	九〇一四〇六八	一九〇九八五九三三	一〇〇〇〇〇〇〇〇	五二三五九八七七六
			一率	二率	三率

凡設割綫自十五度至三十度則用割綫求半弧法求之今將設割綫一一五四七〇〇五三八求其半弧算式列於後

法以割線加半徑得二一五四七〇〇五三八爲割線半徑和爲一率又減半徑得一五四七〇〇五三八爲二率半徑爲三率求得四率七一七九六七七六九六爲半弧切線三率爲第一數正　次以半徑爲連比例一率半弧切線三率爲三率置第一數以三

率乘之一率除之得五率三除之四除之得四二九五六四六七七爲七率用數第一乘法八乘之得三四三六五一七四爲第二數負　置七率用數以三率乘之一率除之得七率五除之六除之得一〇二八〇四五二爲九率用數第二乘法一八四乘之得一八九一六〇三爲第三數正　置九率用數以三率乘之一率除之得九率七除之八除之得〇一三一八〇四一爲十一率用數第三乘法八四四八乘之得一一一三四八爲第四數負　置十一率用數以三率乘之一率除之得十一率九除之十除之得〇〇〇〇一〇五一四六爲十三率用數第四乘法

六四八五七七六乘之得六八一九為第五數正　置十三率用數以三率乘之一率除之得十三率十一除之十二除之得〇〇〇〇〇〇〇五七一九為十五率用數第五乘法七四九七二一六〇乘之得四二八為第六數負　置十五率用數以三率乘之一率除之得十五率十三除之十四除之得〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇二二五六為十七率用數第六乘法一二一七四六六〇〇〇〇乘之得〇二七為第七數正　置十七率用數以三率乘之一乘除之得十七率十五除之十六除之得〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇六七五第七乘法二二六四四三八

五六六〇〇〇〇〇〇乘之得〇〇一為第八數負

乃并諸正數得七一九八六六一四五以并諸負數

三四四七六九五一減之得六八五三八九一九四

為以半徑為一率半弧為二率之三率與半徑相乘

平方開之得二六一七九九三八八為半弧弧分檢

弧線表得十五度倍之得三十度即本弧

一率 三率
一〇〇〇〇〇〇〇〇〇
七一七九六七六九六

七率用數 九 十一 十三 十五 十七
四二九五六四六七七
一〇二八〇四五二
〇一三一八〇四一
〇〇〇〇一〇五一四六
〇〇〇〇〇〇〇〇五七一九
〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇二二五六
〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇

第三十二數
七一七九六七六九六
三四三六五二七四
一八九一六〇三

四　五　六　七　八
一一一三四八
六八二九
四二八
二七
一

并下數　七一九八六六一四五

并負數　三四四七六九五一

減得數　六八五三八九一九四　三率

二六七九九三八八　二率

一〇〇〇〇〇〇〇〇〇　一率

凡設割線自三十度至四十五度則用割線求倍本弧法求之今將設割線一一五四七〇〇五三八求其倍本弧算式列於後

法以割線自乘得一三三三三三三三三〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇截用十位準數下惟以〇存其位數為割線𢍰以半徑自乘倍之相減得六六六六六六七〇〇〇

〇〇〇〇〇爲一率割綫弁爲二率半徑爲三率求得四率二〇〇〇〇〇〇〇〇爲倍本弧割線命爲連比例第一率半徑爲二率如割線求餘弧術入之依前得倍本弧之餘弧三十度以減象限得倍本弧六十度半之得三十度即本弧

凡設割線自四十五度至六十度則用割綫求倍餘弧法求之今將設割綫二〇〇〇〇〇〇〇〇求其倍餘弧算式列於後

法以割綫自乘得四〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇爲割線弁以半徑自乘倍之相減得二〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇爲一率割綫

昇爲二率半徑爲三率求得四率二〇〇〇〇〇〇〇〇爲倍餘弧割綫命爲連比例第一率半徑爲二率如割線求餘弧術入之依前求得倍餘弧之餘弧三十度以加象限得倍本弧一百二十度半之得六十度卽本弧

外切密率卷之四

譚瑩玉生覆校